RETTA DEI MMQQ

Data una sequenza di punti (x_i , y_i) ai quali sono associati n valori, la retta dei MMQQ è $y=a+bx$ con a e b da determinare tramite il sistema di equazioni normali:

$$\begin{cases} na + b\sum_i x_i = \sum_i y_i \\ a\sum_i x_i + b\sum_i x_i^2 + = \sum_i x_i y_i \end{cases}$$

Esercizio 1:

1) Calcolare la retta dei MMQQ;

2) Calcolare il valore estrapolato per $x=9$ e calcolare il valore interpolato per $x=4$;

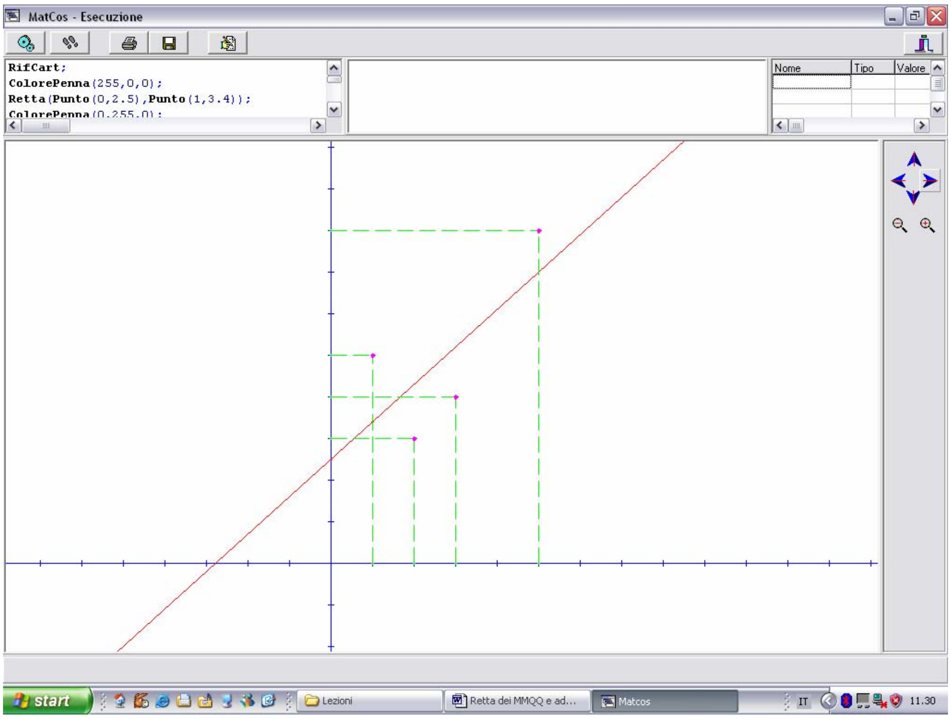
3) Calcolare l'adeguatezza della retta tramite il metodo R^2 .

SOLUZIONE

n=4	x_i	y_i	x_i^2	$x_i * y_i$
1	1	5	1	5
2	2	3	4	6
3	3	4	9	12
4	5	8	25	40
	11	**20**	**39**	**63**

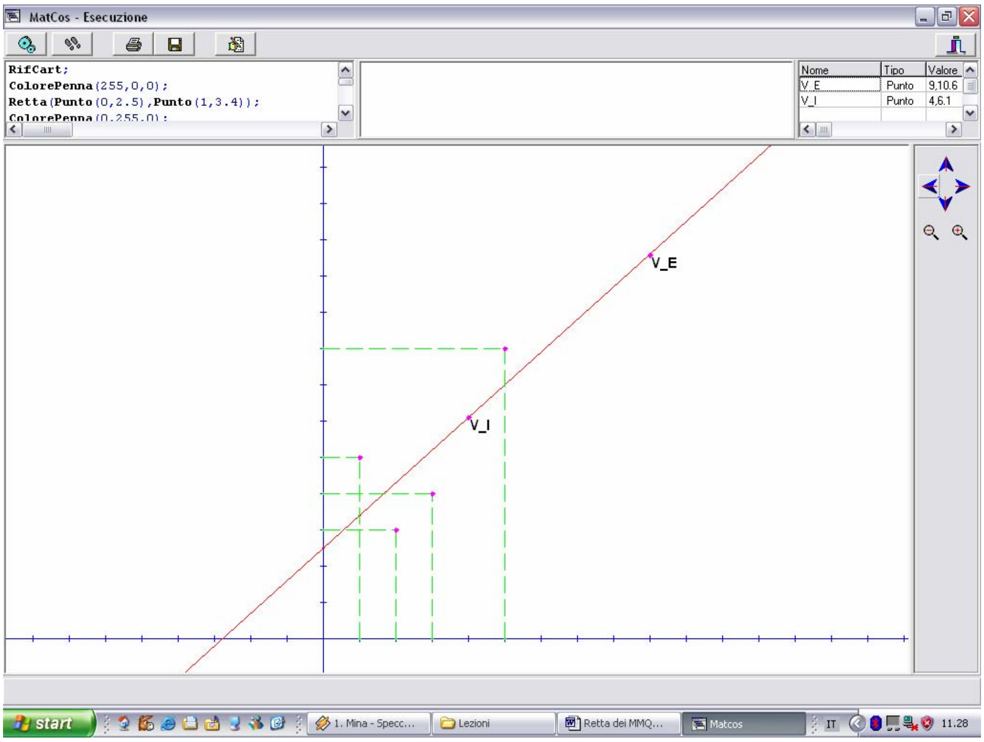
1) $\begin{cases} 4a + 11b = 20 \\ 11a + 39b = 63 \end{cases}$ $\quad a = \dfrac{\begin{vmatrix} 20 & 11 \\ 63 & 39 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 11 & 39 \end{vmatrix}} = \dfrac{87}{35} = 2,5 \quad b = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 20 \\ 11 & 63 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 11 & 39 \end{vmatrix}} = \dfrac{32}{35} = 0,9$

L'equazione della retta dei MMQQ è allora $y=2,5 + 0,9\,x$



2) valore estrapolato per $x=9$: $y=2,5 + 0,9\,x = 2,5 + 0,9\,(9) = 10,6$ $\qquad V_E = (9,10.6)$

valore interpolato per $x=4$: $y=2,5 + 0,9\,x = 2,5 + 0,9\,(4) = 6,1$ $\qquad V_E = (4,6.1)$



3) L’adeguatezza della retta tramite il metodo R^2 si calcola trovando il valore della seguente relazione: $0 \le R^2 = \frac{\sum_i (\hat{y}_i - \overline{y}_i)^2}{\sum_i (y_i - \overline{y}_i)^2} \le 1$.

Se $R^2 = 0$ cioè $\hat{y}_i = \overline{y}_i$ si ottiene una retta parallela all’asse x ed in questo caso l’adeguatezza della retta è minima.
Se $R^2 = 1$ cioè $\hat{y}_i = y_i$ l’adeguatezza della retta è massima.
Se il valore di R^2 è superiore a 0,5 il valore è attendibile, se è inferiore a 0,5 bisogna essere cauti.

y_i = valore rilevato
$\hat{y}_i$ = valore perequato
$\overline{y}_i = \frac{\sum_i y_i}{n} = \frac{20}{4} = 5$ = media dei valori rilevati .

n=4	x_i	y_i	x_i^2	$x_i * y_i$	$\hat{y}_i$	$(\hat{y}_i - \overline{y}_i)$	$(y_i - \overline{y}_i)$	$(\hat{y}_i - \overline{y}_i)^2$	$(y_i - \overline{y}_i)^2$
1	1	5	1	5	2.5+0.9=3.4	3.4-5=-1.6	5-5=0	2.56	0
2	2	3	4	6	2.5+1.8=4.3	4.3-5=-0.7	3-5=-2	0.49	4
3	3	4	9	12	2.5+2.7=5.2	5.2-5=+0.2	4-5=-1	0.04	1
4	5	8	25	40	2.5+4.5=7.0	7.0-5=+2.0	8-5=+3	4.00	9
	11	**20**	**39**	**63**	**19.9**			**7.09**	**14**

$$R^2 = \frac{\sum_i (\hat{y}_i - \overline{y}_i)^2}{\sum_i (y_i - \overline{y}_i)^2} = \frac{7.09}{14} = 0.5 \text{ (adeguatezza media)}$$

Esercizio 2:

Consideriamo l’andamento di un cinema cioè quando il cinema ha 3.500 presenze il prezzo del biglietto è 5 €, quando ha 3.000 presenze il prezzo del biglietto è 6 € e quando ha 2.000 presenze il prezzo del biglietto è 8 €.

1) calcolare il prezzo del biglietto quando le presenze del cinema sono 4.000;

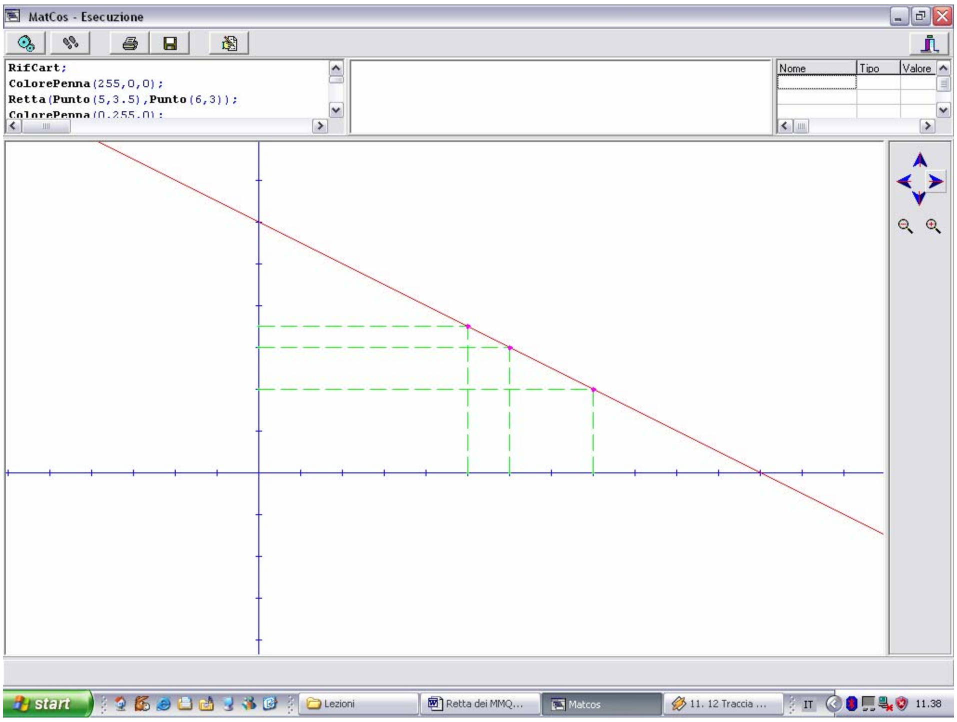
2) calcolare l’adeguatezza della retta dei MMQQ

SOLUZIONE

n=3	x_i	y_i	x_i^2	$x_i * y_i$
1	5	3.500	25	17.500
2	6	3.000	36	18.000
3	8	2.000	64	16.000
	19	**8.500**	**125**	**51.500**

$$\begin{cases} 3a+19b=8.500 \\ 19a+125b=51.500 \end{cases} \quad a=\frac{\begin{vmatrix} 8500 & 19 \\ 51500 & 125 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 19 \\ 19 & 125 \end{vmatrix}}=\frac{84000}{14}=6000 \quad b=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 8500 \\ 19 & 51500 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 19 \\ 19 & 125 \end{vmatrix}}=\frac{-7000}{14}=-500$$

L'equazione della retta dei MMQQ è allora $y=6000-500\,x$



1) Per $y=4000$ segue che $x=\frac{2000}{500}=4$. Perché? Perché in questo caso si tratta di estrapolazione inversa cioè $4000-6000=-500x \rightarrow x=\frac{2000}{500}=4 \rightarrow V_E=(4,4000)$.

Allora si deduce che il prezzo del biglietto quando nel cinema sono presenti 4.000 persone è di 4 €.

2) L'adeguatezza della retta tramite il metodo R^2 si calcola trovando il valore della seguente relazione: $0 \le R^2=\frac{\sum_i (\hat{y}_i-\bar{y}_i)^2}{\sum_i (y_i-\bar{y}_i)^2} \le 1$.

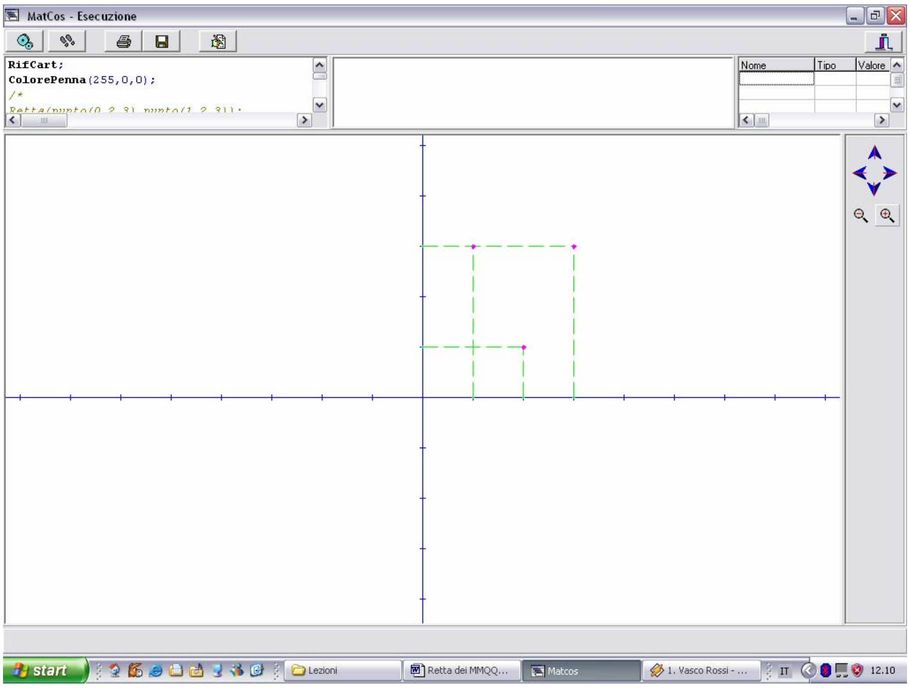
$\bar{y}_i=\frac{\sum_i y_i}{n}=\frac{8500}{3}=2833.3$ = media dei valori rilevati .

n=3	x_i	y_i	x_i^2	$x_i * y_i$	$\hat{y}_i$	$(\hat{y}_i-\bar{y}_i)$	$(y_i-\bar{y}_i)$	$(\hat{y}_i-\bar{y}_i)^2$	$(y_i-\bar{y}_i)^2$
1	5	3.500	25	17.500	3.500	+666.7	+666.7	444488.9	444488.9
2	6	3.000	36	18.000	3.000	+166.7	+166.7	27788.9	27788.9
3	8	2.000	64	16.000	2.000	-833.3	-833.3	694388.9	694388.9
	19	**8.500**	**125**	**51.500**				**1166666.7**	**1166666.7**

$R^2 = \dfrac{1166666.7}{1166666.7} = 1$ (adeguatezza massima infatti $y_i = \hat{y}_i$).

Esercizio 1:

Data la situazione rappresentata di seguito calcolare l'adeguatezza della retta tramite il metodo R^2 .

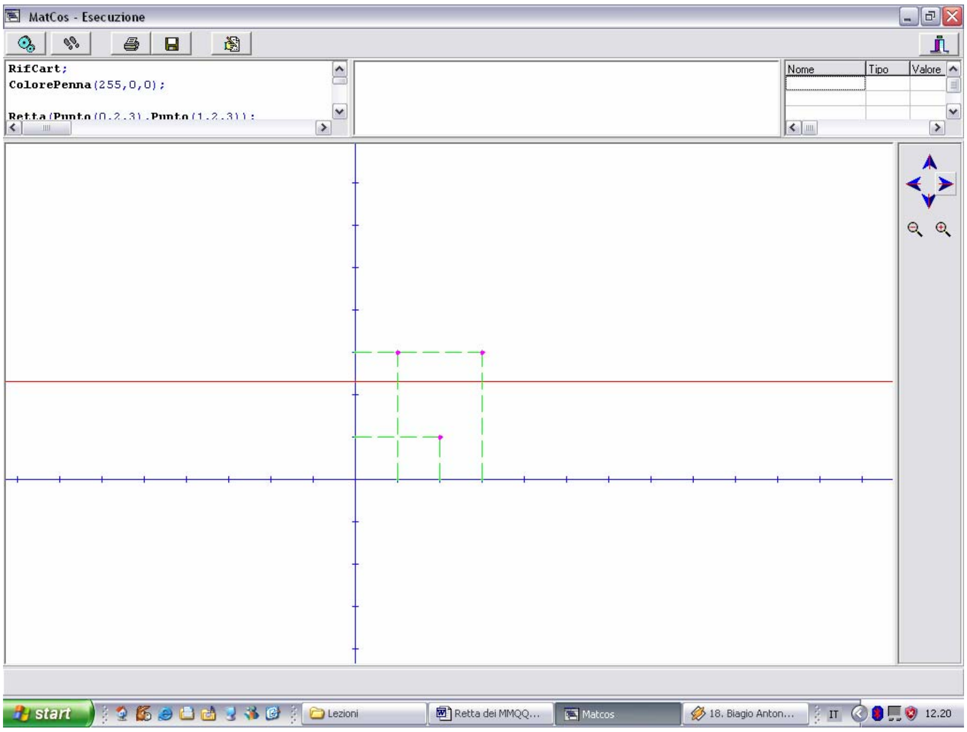


SOLUZIONE

n=3	x_i	y_i	x_i^2	$x_i * y_i$
1	1	3	1	3
2	2	1	4	2
3	3	3	9	9
	6	**7**	**14**	**14**

$$\begin{cases} 3a + 6b = 7 \\ 6a + 14b = 14 \end{cases} \quad a = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 14 & 14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{vmatrix}} = \frac{14}{6} = 2.3 \quad b = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{vmatrix}} = \frac{42 - 42}{6} = 0$$

L'equazione della retta dei MMQQ è allora $y=2.3$



$$\bar{y}_i = \frac{\sum_i y_i}{n} = \frac{7}{3} = 2.3$$ = media dei valori rilevati .

n=3	x_i	y_i	x_i^2	$x_i * y_i$	$\hat{y}_i$	$(\hat{y}_i - \bar{y}_i)$	$(y_i - \bar{y}_i)$	$(\hat{y}_i - \bar{y}_i)^2$	$(y_i - \bar{y}_i)^2$
1	1	3	1	3	2.3	0	+0.7	0	0.49
2	2	1	4	2	2.3	0	-1.3	0	1.69
3	3	3	9	9	2.3	0	+0.7	0	0.49
	6	**7**	**14**	**14**				**0**	**2.67**

$R^2 = \frac{0}{2.67} = 0$ (adeguatezza minima infatti $\bar{y}_i = \hat{y}_i$).